Commande numérique des systèmes

Echantillonnage d’un signal

1 – Terminologie 20

2 – Échantillonnage idéal 22

3 – Transformée de Laplace d'un signal échantillonné 26

4 – Spectre du signal échantillonné 27

5 – Théorème de Shannon 32

6 – Reconstruction du signal 34

7 – Exemple 38

1 – Terminologie

☞ Signal analogique :

$$f(t) : I\!R \longrightarrow I\!R \quad \text{fonction à temps continu}$$

☞ Signal discret : signal définie en des points distincts

$$f(t) : \{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow I\!R \quad \text{fonction à temps discret}$$

avec $\{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ sous-ensemble de nombres réels

☞ Signal numérique : signal discret prennant un nombre fini N de valeurs réelles

$$f(t) : \{t_k \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \{f_1, f_2 \ldots f_N\} \subset I\!R \quad \text{fonction à temps et à}$$

amplitude discrets

Échantillonnage d'un signal

- Découpage temporel de l'information $\Longrightarrow$ CAN

  - *Echantillonnage* = consiste à prélever, à période fixe T_e, la valeur du signal analogique $\Longrightarrow$ signal discret (suite d'échantillons)

  - *Quantification* = résulte du fait que les données sont représentées sur un calculateur dans un certain format

    "discrétisation" de l'amplitude su signal discret $\Longrightarrow$ signal numérique (suite de nombres)

    → Erreur associée à la quantification = *bruit de quantification*

  CAN remplace un signal analogique par signal numérique (suite des nombres)

- *Reconstruction* = consiste à élaborer un signal analogique à partir d'une suite de nombres $\Longrightarrow$ CNA

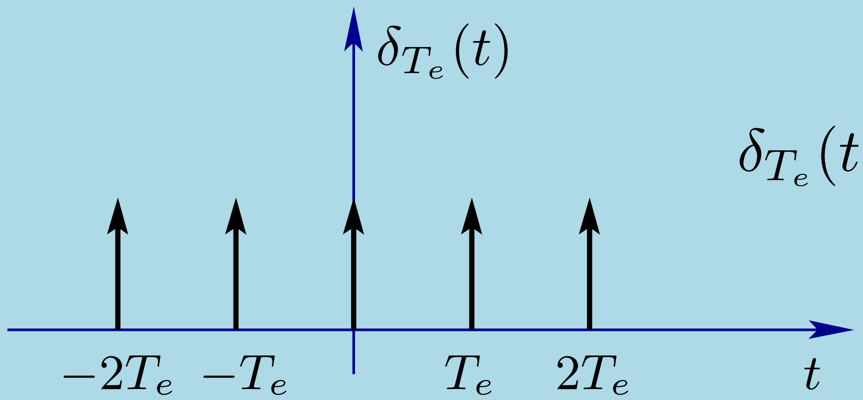
2 – Échantillonnage idéal

☞ Définition :

L'*échantillonneur idéal* de période T_e est un opérateur mathématique qui associe à tout signal à temps continu $f(t)$ un signal $f_e(t)$ définie par

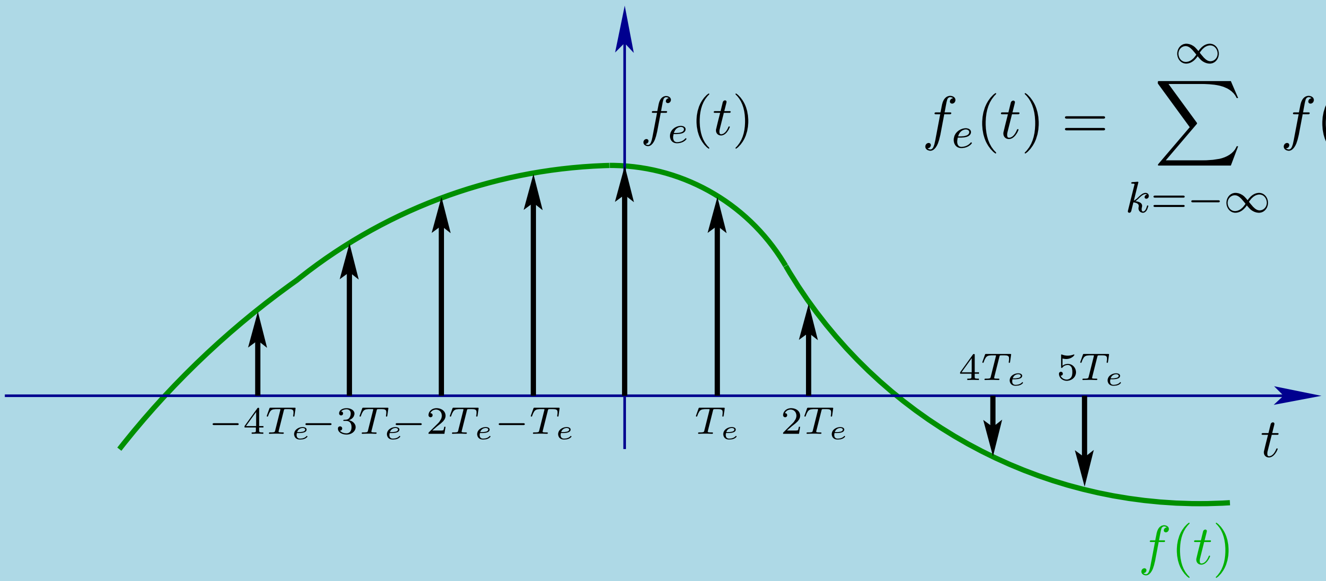
$$f_e(t) = f(t)\delta_{T_e}(t) \qquad (1)$$

où $\delta_{T_e}(t)$ est la fonction peigne (d'impulsions) de Dirac.



$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

☞ Exemple :

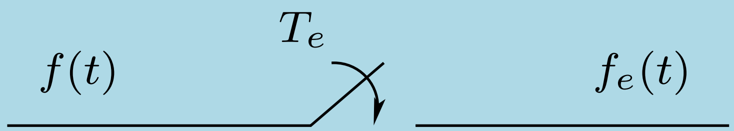


$$f_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

➠ $f_e(t)$ = signal à temps continu appelé *signal échantillonné idéal*

➠ $f_e(t)$ est une fonction peigne de Dirac modulée en amplitude par la fonction $f(t)$

☞ Symbole de l'échantillonneur :



☞ Echantillonnage :

- Le prélèvement de la valeur du signal continu aux instants $t = kT_e$
- Supposons négligeable l'effet de la quantification

$\Longrightarrow$ On définit le signal échantillonné par la suite en k : $\{f(k)\} = \{f(kT_e)\}$

☞ Remarque :

- $f_e(t)$ est un signal échantillonné idéal (train d'impulsions) = signal virtuel permettant d'inclure l'analyse des signaux échantillonnés dans l'analyse des signaux continus
- $f(kT_e)$ le signal échantillonné (signal discret ou numérique)

3 – Transformée de Laplace d'un signal échantillonné

☞ Première formulation :

$$\boxed{F_e(s) = \mathcal{L}\{f_e(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)e^{-kT_e s}} \tag{2}$$

☞ Deuxième formulation :

➠ Décomposition en série de Fourrier de $\delta_{T_e}(t)$

$$\delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi kt}{T_e}} \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{1}{T_e}\int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta_{T_e}(t)e^{-j\frac{2\pi kt}{T_e}}dt = \frac{1}{T_e}$$

Alors,

$$\boxed{F_e(s) = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\Big(s - j\frac{2\pi k}{T_e}\Big)} \tag{3}$$

4 – Spectre du signal échantillonné

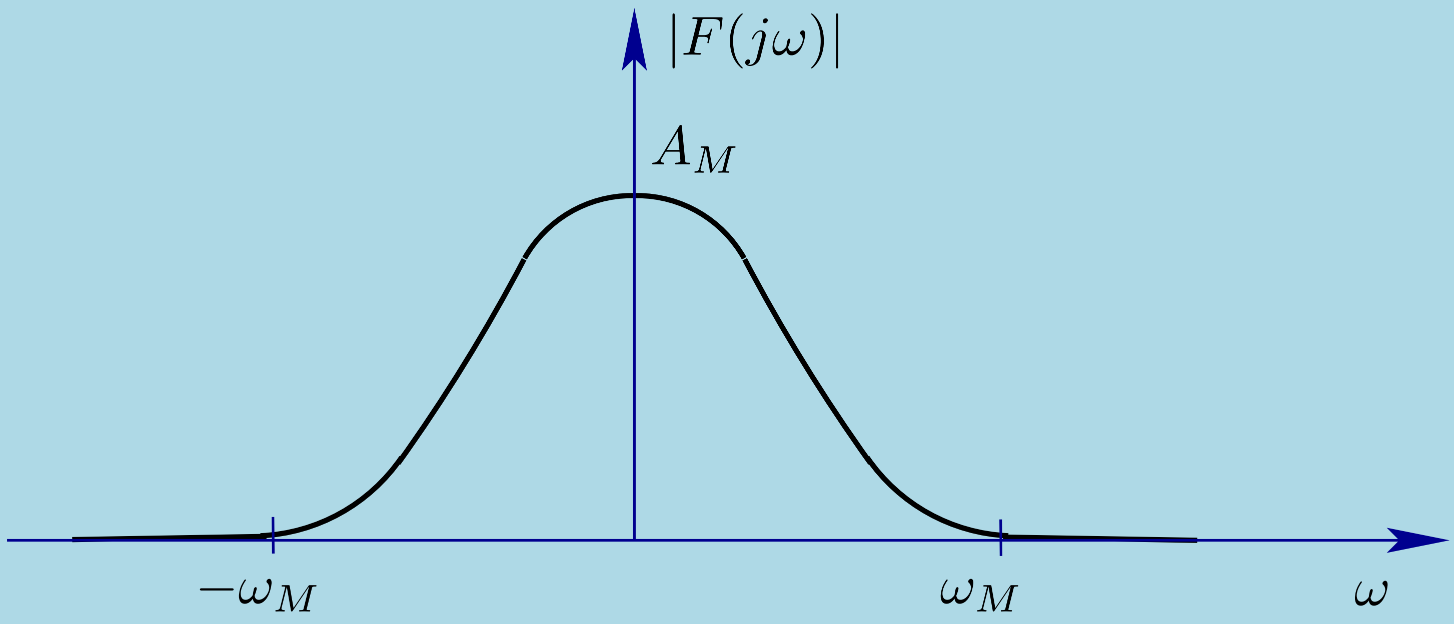
☞ Transformée de Fourier du signal échantillonné :

$$F_e(j\omega) = \mathcal{F}\{f_e(t)\} = \frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F\big(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_e}\big)$$

➠ *Spectre* du signal échantillonné = module de la transformée de Fourier du signal $|F(j\omega)| \Longrightarrow$ informations sur les composantes harmoniques présentes dans le signal échantillonné

$\rightarrow$ spectre périodique de période $\omega_e = \dfrac{2\pi}{T_e}$ appelé *pulsation d'échantillonnage*

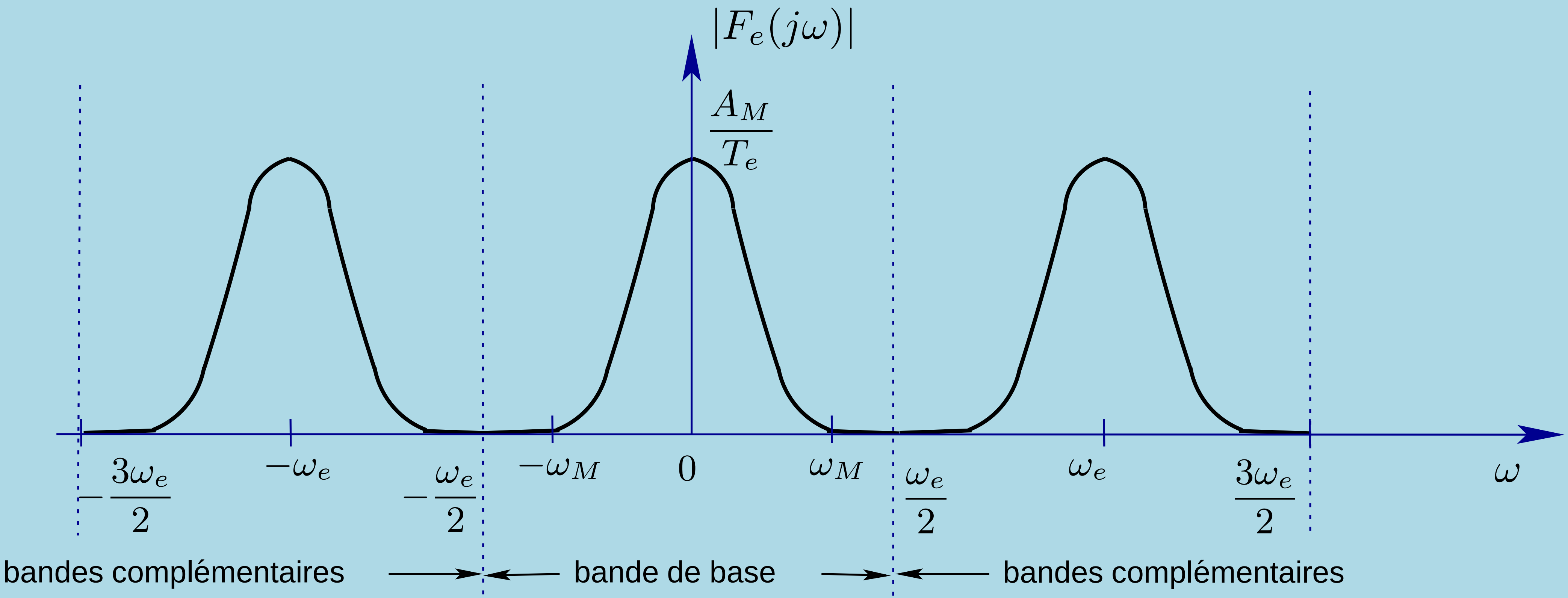
➠ Spectre du signal à temps continu



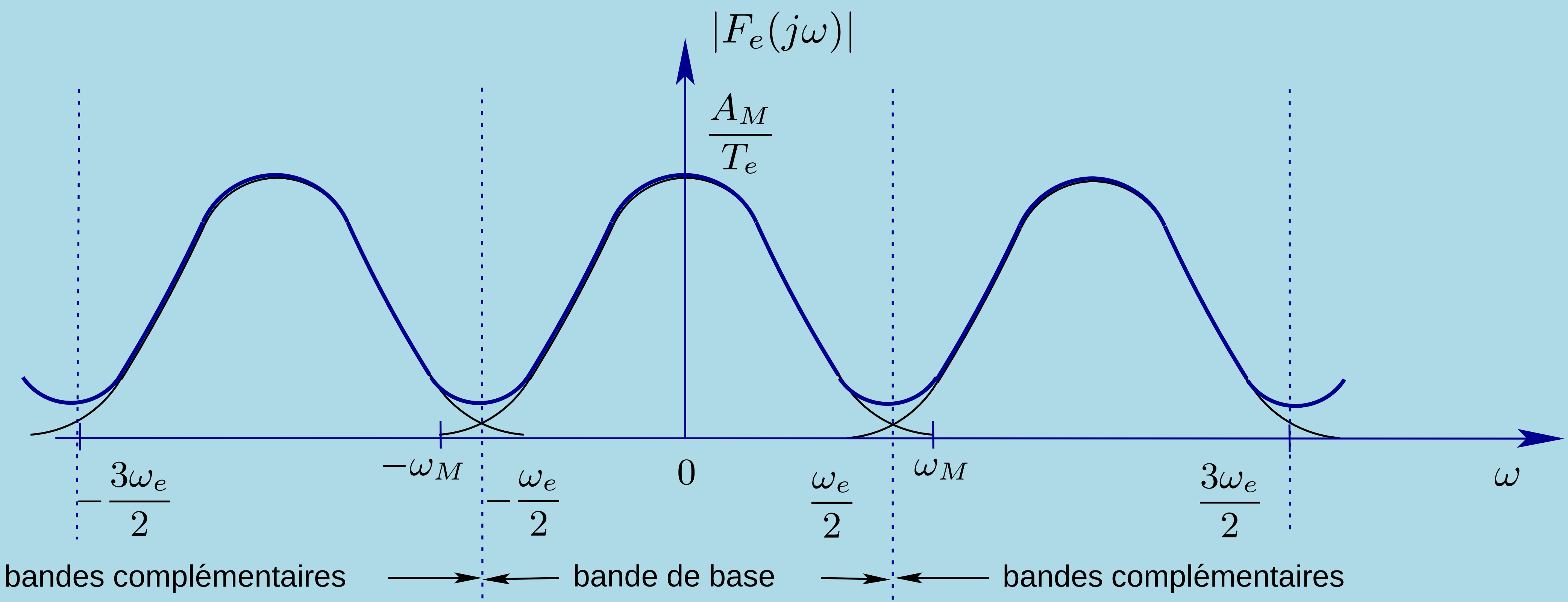
$\rightarrow$ spectre du signal échantillonné est obtenu à partir du spectre du signal à temps continu

$\Longrightarrow$ 2 cas en fonction de ω_M et de $\dfrac{\omega_e}{2}$ appelé *pulsation de Nyquist*

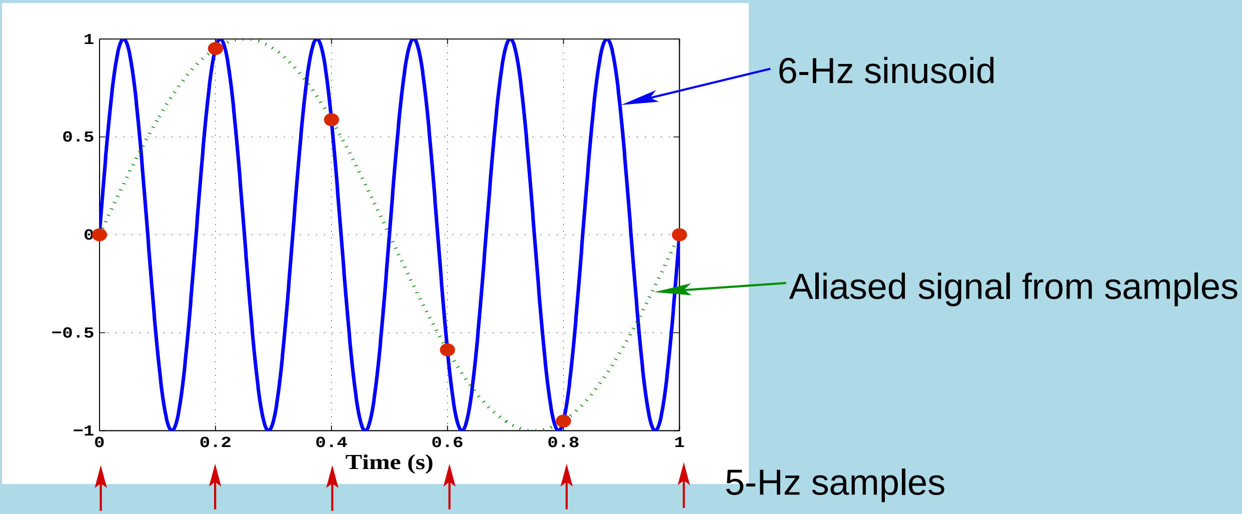
☞ Spectre du signal échantillonné lorsque $\omega_M \leq \dfrac{\omega_e}{2}$



☞ Spectre du signal échantillonné lorsque $\omega_M > \dfrac{\omega_e}{2}$



➠ Phénomène de repliement spectral : example



5 – Théorème de Shannon

☞ Théorème de Shannon :

Pour pouvoir reconstituer sans perte d'information un signal continu à partir des échantillons de période T_e de celui-ci, il faut que la fréquence d'échantillonnage, $f_e = \dfrac{1}{T_e}$, soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le spectre de ce signal :

$$\boxed{f_e \geq 2 f_M \quad \text{où} \quad f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}}$$

☞ Problème :

Pour les systèmes échantillonnés, le bruit de mesure à haute fréquence peut être replié à basse fréquence dans le voisinage de la bande passante de système $\Longrightarrow$ réponse du système au bruit de mesure

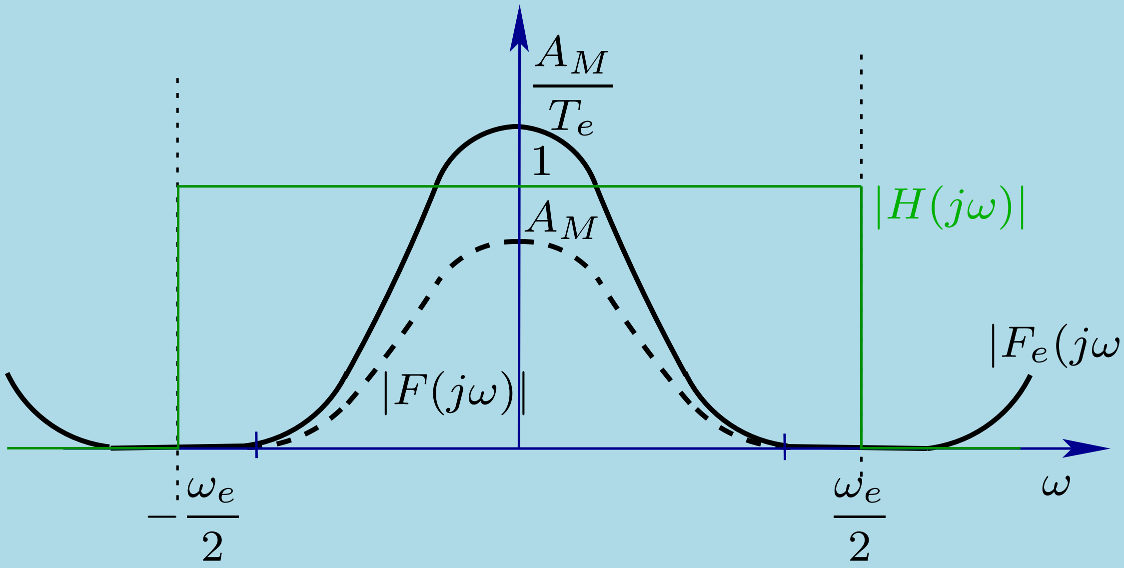
☞ Solution : filtre anti-repliement

Si le signal comporte des composantes spectrales à des fréquences supérieures à la fréquence de Nyquist alors il faut filtrer le signal analogique avant l’échantillonnage

6 – Reconstruction du signal

☞ Reconstruction idéale

➠ Utilisation d'un filtre passe-bas idéal de réponse harmonique $H(j\omega)$



$$F(j\omega) = T_e F_e(j\omega) H(j\omega)$$

$$\Longrightarrow f(t) = T_e \mathcal{F}^{-1}\{F_e(j\omega)H(j\omega)\} = T_e(f_e * h)(t)$$

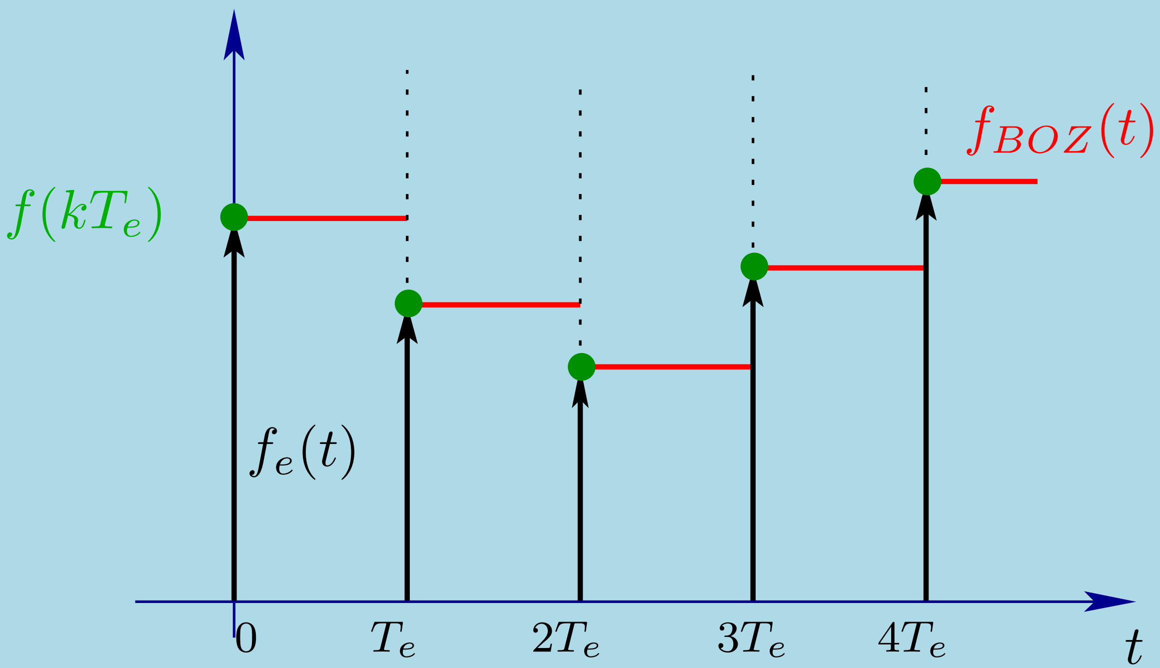
avec $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \dfrac{1}{\pi t}\sin(\dfrac{\pi t}{T_e})$

➠ Signal reconstruit : $f(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e)\,\mathrm{sinc}\,\frac{t-kT_e}{T_e}$

☞ Reconstruction approchée

➠ Utilisation du *bloqueur d'ordre zéro (BOZ)*

$$f_{BOZ}(t) = f(kT_e) \quad \text{pour} \quad t \in [kT_e,\ (k+1)T_e)$$

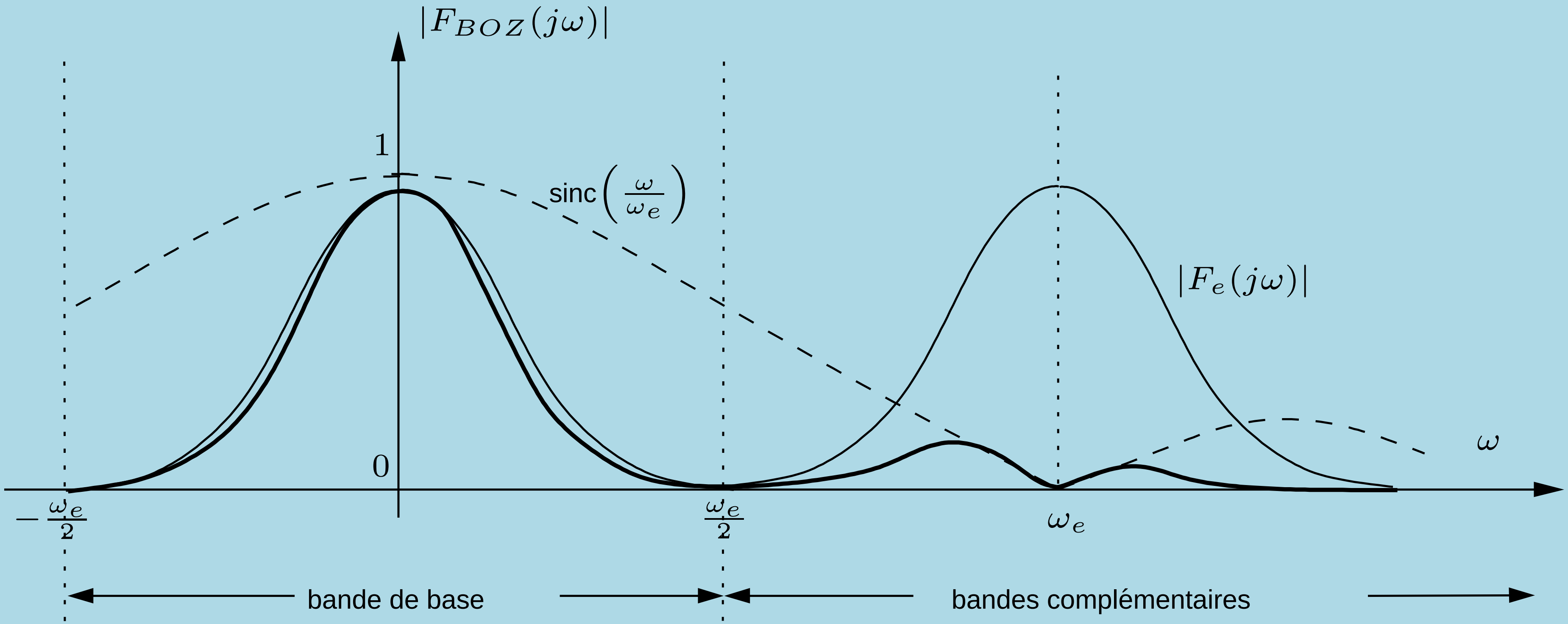


$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s}$$

$$B_0(j\omega) = e^{-j\omega\frac{T_e}{2}} \frac{2\sin\omega\frac{T_e}{2}}{\omega}$$

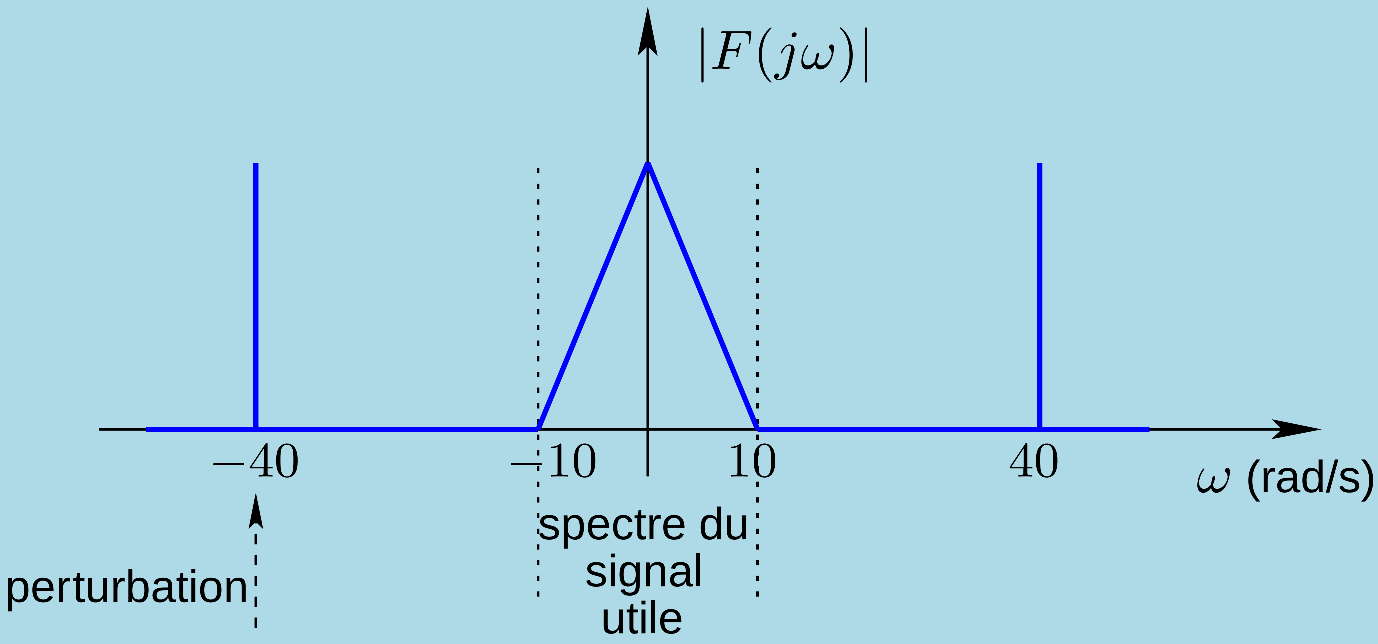
Effet du bloqueur dans la bande de base :

$$F_{BOZ}(j\omega) = B_0(j\omega)F_e(j\omega) = \underbrace{e^{-j\frac{\omega T_e}{2}}}_{\text{déphasage}} \underbrace{\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)}_{\text{déformation}} F(j\omega)$$



7 – Exemple

Soit un signal analogique $f(t)$ de spectre :



- Proposer une pulsation de coupure pour un filtre anti-repliement
- Proposer une pulsation d'échantillonnage