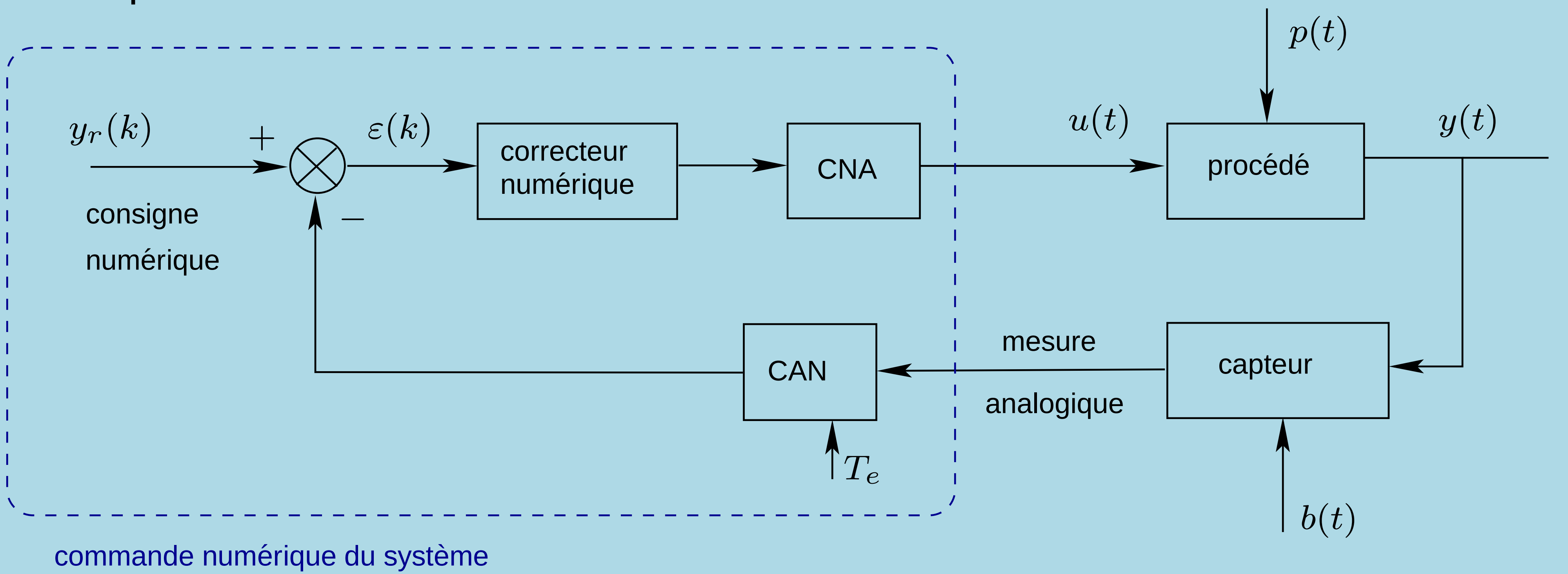
Commande numérique des systèmes

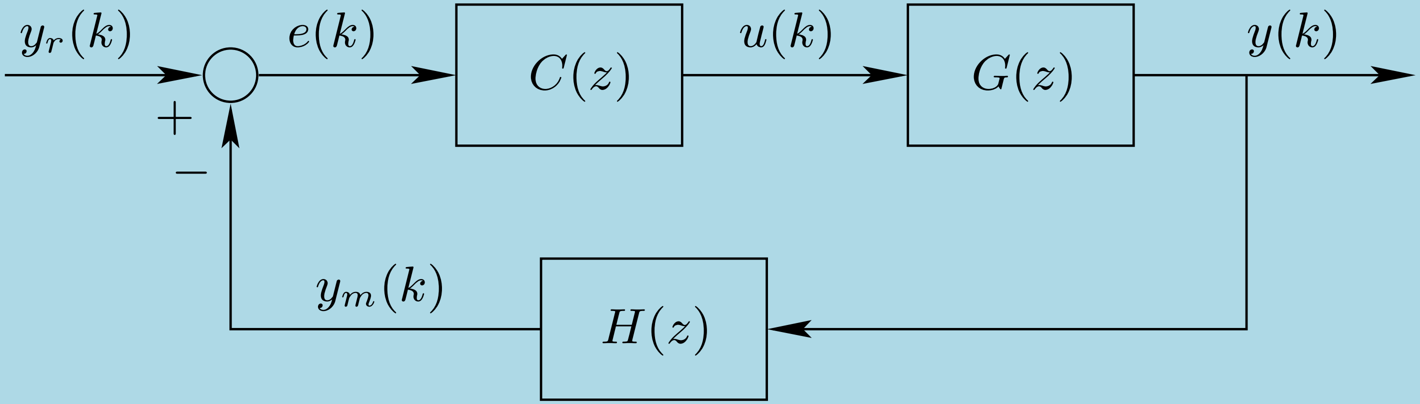
Analyse des systèmes échantillonnés en BF

1 – Systèmes à commande numérique

☞ Principe de la commande :



☞ Système asservi équivalant :



$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \text{ et}$$

$$G(z)H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}$$

☞ Etude de la stabilité du système asservi :

$$F_{BF}(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)} = \frac{N_{BF}(z)}{D_{BF}(z)}$$

$\Longrightarrow$ étudier les racines du polynôme caractéristique $D_{BF}(z) = 0$ ou de l'équation caractéristique

$$1 + F_{BO}(z) = 0 \quad \text{où} \quad F_{BO}(z) = C(z)G(z)H(z)$$

- méthodes algébriques : critère de Jury, transformée en w et critère de Routh
- *méthodes géométriques* (ou harmoniques) : critère de Nyquist, lieu d'Evans

2 – Critère de Nyquist

☞ Théorème de Cauchy :

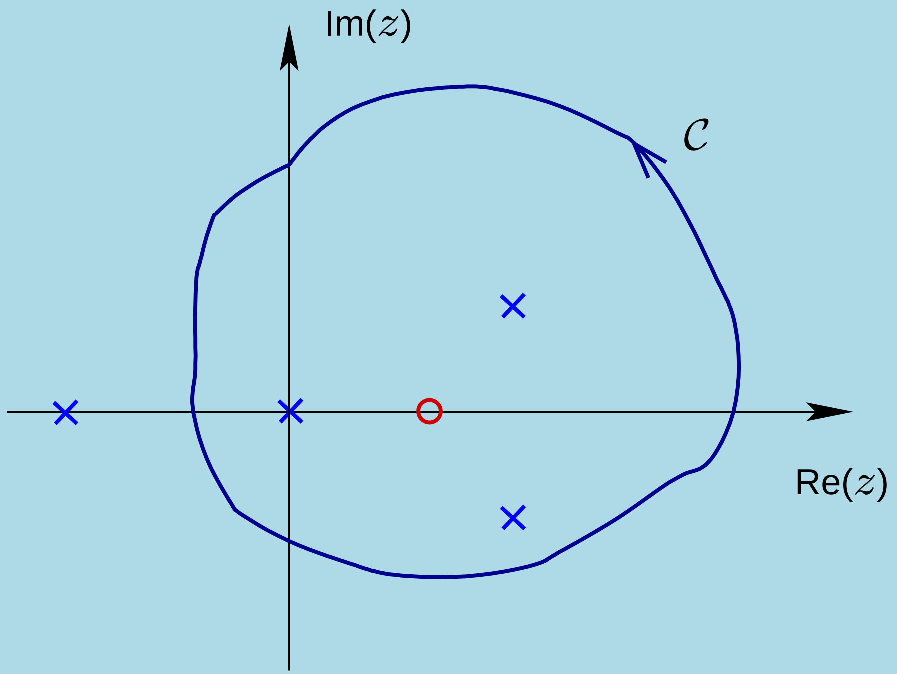
Soit $F(z) = K \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(z - p_i)}$ et $\mathcal{C}$ $\begin{cases} \text{un contour fermé orienté} \\ \text{qui ne passe pas par } z_i \text{ et } p_i \end{cases}$

Théorème : Quand le point z décrit complètement la courbe fermé $\mathcal{C}$ dans un sens donné, le point $F(z)$ décrit une courbe $\mathcal{D}$ qui encercle l'origine, dans le même sens que le parcourt de z sur $\mathcal{C}$, d'un nombre de fois N égal à

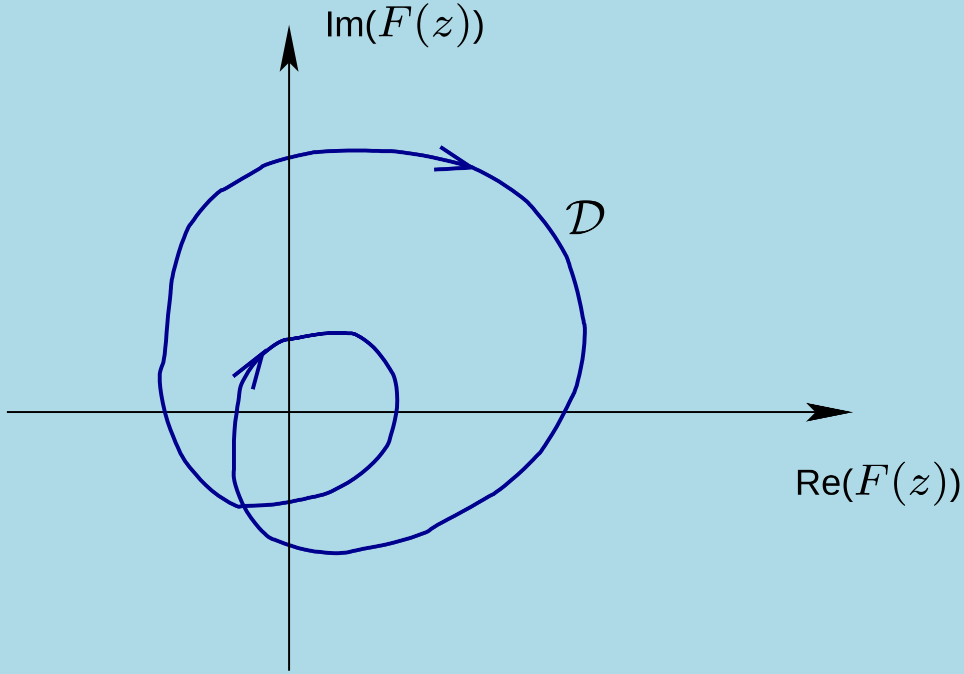
$$N = Z - P$$

avec Z, P le nombre de zéros et de pôles à l'intérieur du contour fermé $\mathcal{C}$

Exemple :



(a) Le contour fermé $\mathcal{C}$.

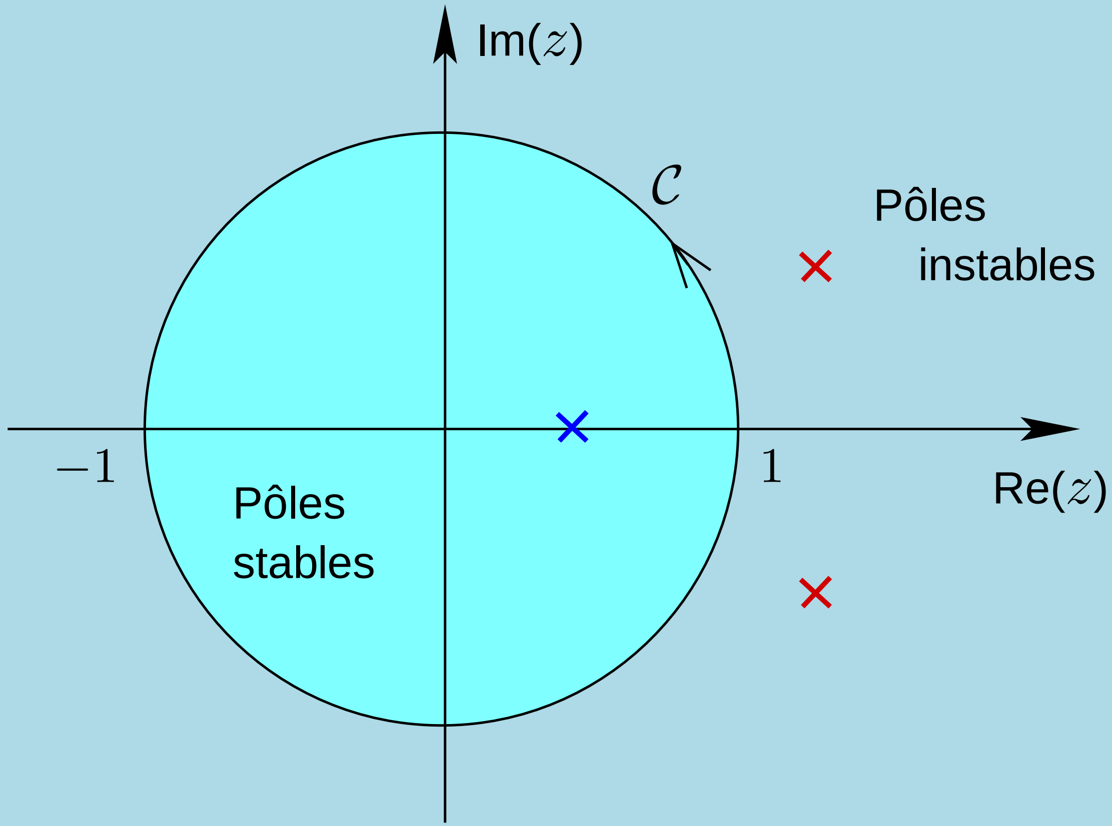


(b) Le contour $\mathcal{D}$ généré par $F(z)$.

$$P = 3 \text{ et } Z = 1 \text{ alors } N = -2$$

☞ Contour de Nyquist = le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique :

$$\mathcal{C} = \{z \mid z = e^{j\Omega}, \Omega \in [-\pi, \pi]\}$$



☞ Critère de Nyquist :

$\Longrightarrow$ application du théorème de Cauchy au contour de Nyquist et à $F(z) = 1 + F_{BO}(z)$

➠ Remarques :

- zéros de $F(z)$ sont les pôles du système en boucle fermée $F_{BF}(z)$
- pôles de $F(z)$ sont les pôles du système en boucle ouverte $F_{BO}(z)$
- le nombre de pôles de $F(z)$ est identique à son nombre de zéros
- les encerclements de $F(z)$ autour de l'origine sont équivalents aux encerclements de $F_{BO}(z)$ autour du point -1

- *Lieu de Nyquist* de $F_{BO}(z)$ est définit comme la courbe décrite par l'ensemble de points :

$$\left\{ \left(\mathrm{Re}(F_{BO}(z)), \mathrm{Im}(F_{BO}(z)\right) \mid z = e^{j\Omega}, \Omega \in [-\pi;\ \pi] \right) \right\}$$

- *Critère de Nyquist*

Le système discret en boucle fermée, d'équation caractéristique $1 + F_{BO}(z) = 0$, est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de $F_{BO}(z)$ parcouru de $\Omega = -\pi$ à $\Omega = \pi$ avec $z = e^{j\Omega}$, entoure le point -1 dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles instables de $F_{BO}(z)$

➠ Remarques :

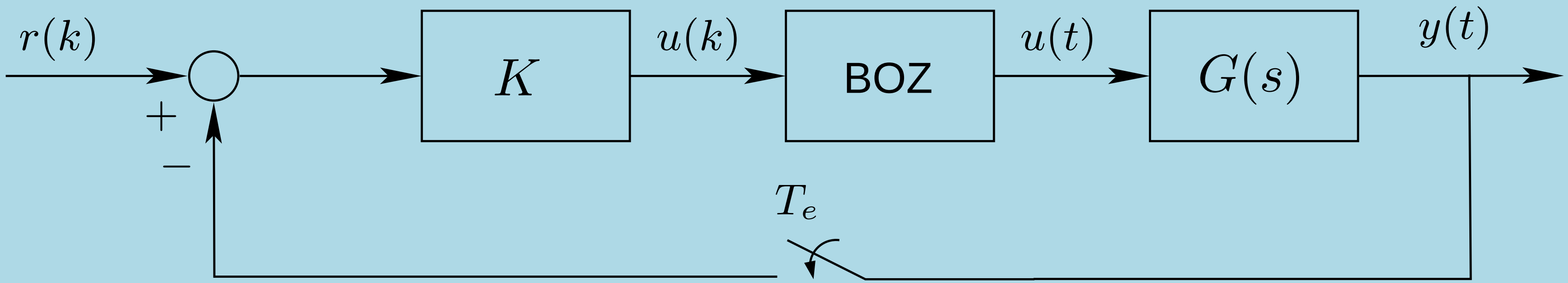
$\rightarrow$ Pour un système échantillonné, le lieu de Nyquist est parcouru de $\omega = -\dfrac{\pi}{T_e}$ à $\omega = \dfrac{\pi}{T_e}$ avec $z = e^{j\omega T_e}$

$\rightarrow$ On construit le lieu de Nyquist pour Ω variant de 0 à π (respectivement pour ω variant de 0 à $\dfrac{\pi}{T_e}$ pour la cas échantillonné)

$\Longrightarrow$ pour des valeurs négatives de Ω (respectivement de ω) on utilise la *symétrie du lieu de Nyquist* par rapport à l'axe réel

☞ Exemple :

Soit le système en BF avec $G(s) = \dfrac{1}{1+\tau s}$. Etudier la stabilité du système en BF.



$$G(z) = \frac{1-c}{z-c} \text{ avec } c = e^{-\frac{T_e}{\tau}} \quad \Longrightarrow \quad F_{BO}(z) = \frac{K(1-c)}{z-c}$$

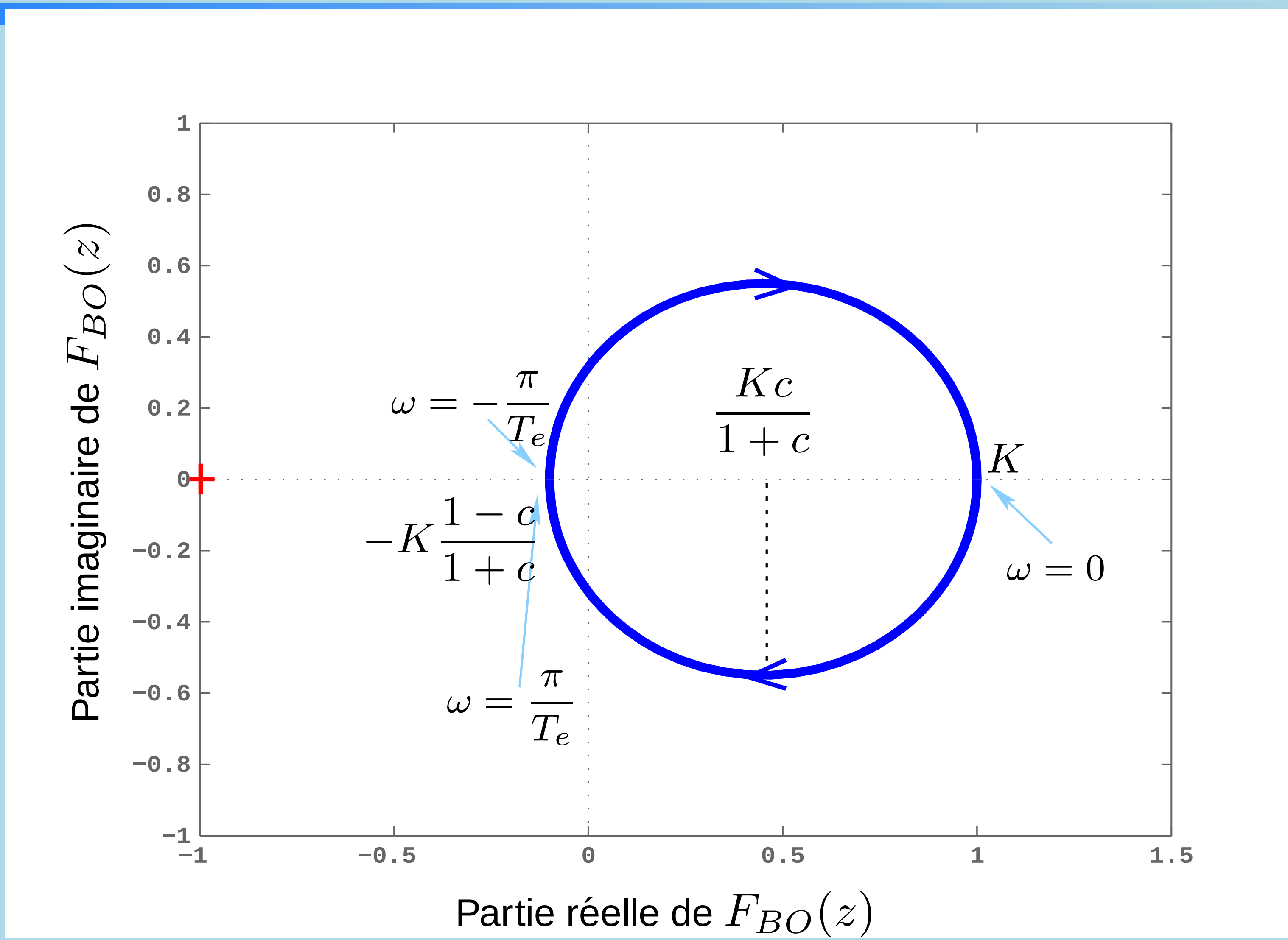
$$z = e^{j\omega T_e} \Longrightarrow F_{BO}(e^{j\omega T_e}) = \underbrace{\frac{K(1-c)(\cos\omega T_e - c)}{1 - 2c\cos\omega T_e + c^2}}_{\text{partie réelle}} - j\underbrace{\frac{K(1-c)\sin\omega T_e}{1 - 2c\cos\omega T_e + c^2}}_{\text{partie imaginaire}}$$

Alors

ω	$F_{BO}(e^{j\omega T_e})$
0	K
$\dfrac{\pi}{T_e}$	$-K\dfrac{1-c}{1+c}$
$-\dfrac{\pi}{T_e}$	$-K\dfrac{1-c}{1+c}$

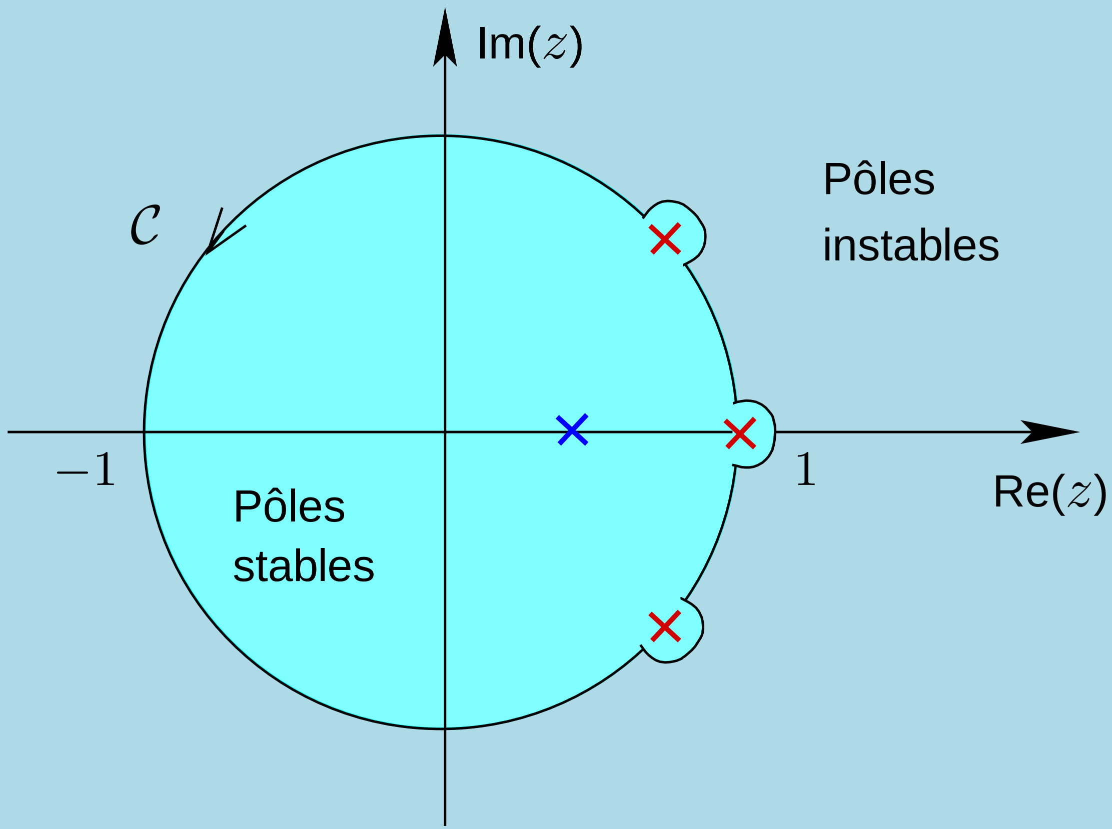
De plus,

$$\left(\Re e(F_{BO}(e^{j\omega T_e})) - \frac{Kc}{1+c}\right)^2 + \left(\Im m(F_{BO}(e^{j\omega T_e}))\right)^2 = \left(\frac{K}{1+c}\right)^2$$



Condition de stabilité en BF : $-1 < -K\dfrac{1-c}{1+c} \Longrightarrow K < \dfrac{1+c}{1-c}$

☞ Contour de Nyquist lorsque $F_{BO}(z)$ a des pôles sur le cercle unité :



$\Longrightarrow$ le lieu de Nyquist présente des branches à l'infini qui se referment par des demi-cercles de rayon infini

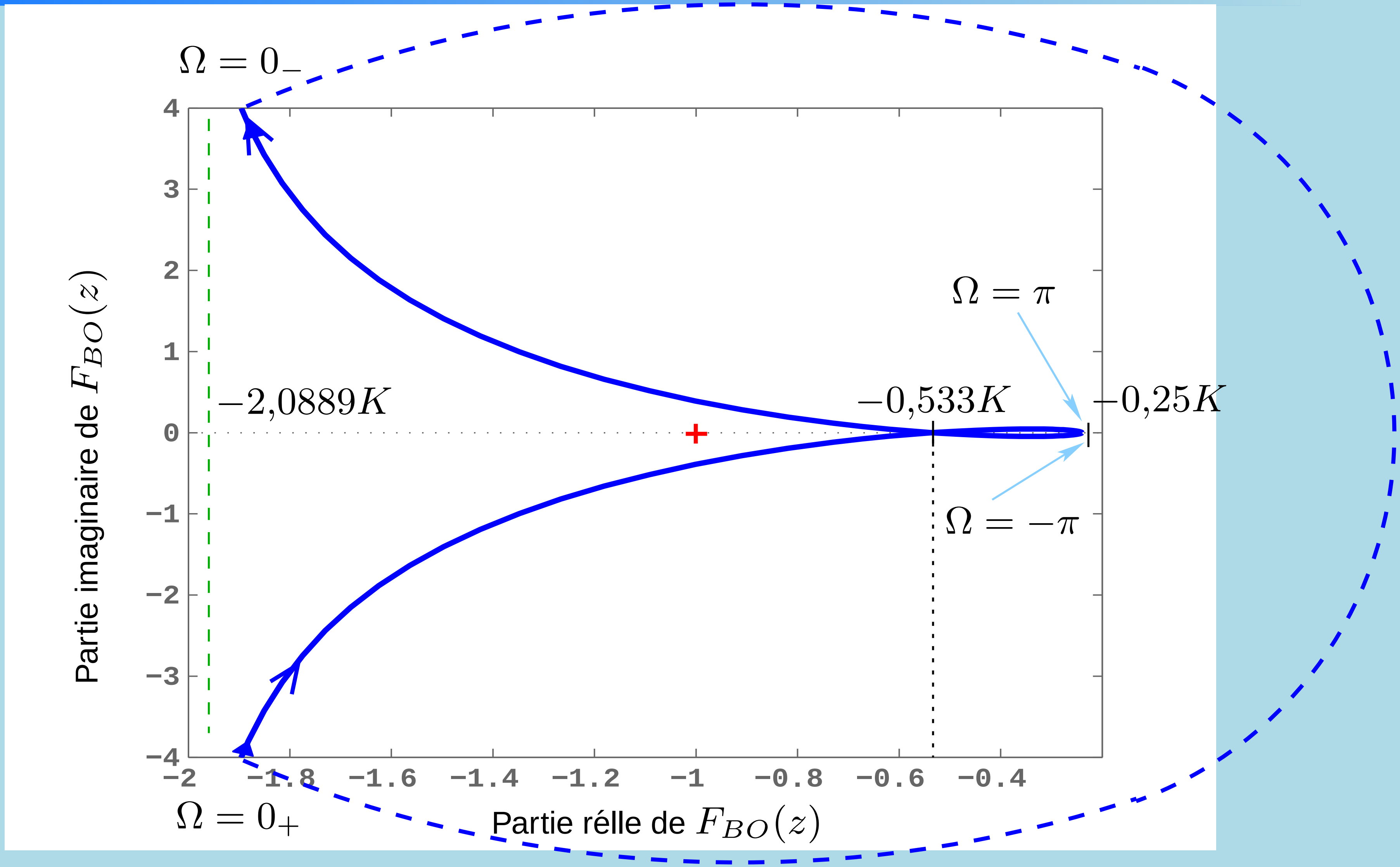
$\Longrightarrow$ P comptabilise uniquement les pôles stables du système en boucle ouverte

☞ Exemple :

Soit $F_{BO}(z) = \dfrac{K(z+0{,}4)}{(z-1)(z-0{,}25)}$. Etudier la stabilité du système en BF.

$$z = e^{j\Omega} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Re e(F_{BO}) = K\frac{(1+\cos\Omega)(\cos\Omega-1{,}65)-(\cos\Omega+0{,}4)(\cos\Omega-0{,}25)}{2(1{,}0625-0{,}5\cos\Omega)} \\ \\ \Im m(F_{BO}) = K\sin\Omega\frac{(\cos\Omega+0{,}4)(\cos\Omega-1)+\sin^2\Omega+1{,}4\cos\Omega-0{,}35}{2(1-\cos\Omega)(1{,}0625-0{,}5\cos\Omega)} \end{array} \right.$$

Ω	$F_{BO}(e^{j\Omega})$
$\Omega \to 0^+$	$\Re e \to -2{,}0889K$ $\Im m \to -\infty$
$\Omega \to 0^-$	$\Re e \to -2{,}0889K$ $\Im m \to \infty$
$\Omega \to \pi$	$\Re e \to -0{,}25K$ $\Im m \to 0$
$\Omega \to -\pi$	$\Re e \to -0{,}25K$ $\Im m \to 0$



Condition de stabilité en BF : $-1 < -0{,}533K \Longrightarrow K < 1{,}8762$

☞ Critère de Nyquist pour des systèmes en boucle ouverte stables :

Critère du revers

Si le système en boucle ouverte est stable alors le système bouclé est stable si et seulement si le lieu de Nyquist de la boucle ouverte n'encercle pas le point -1

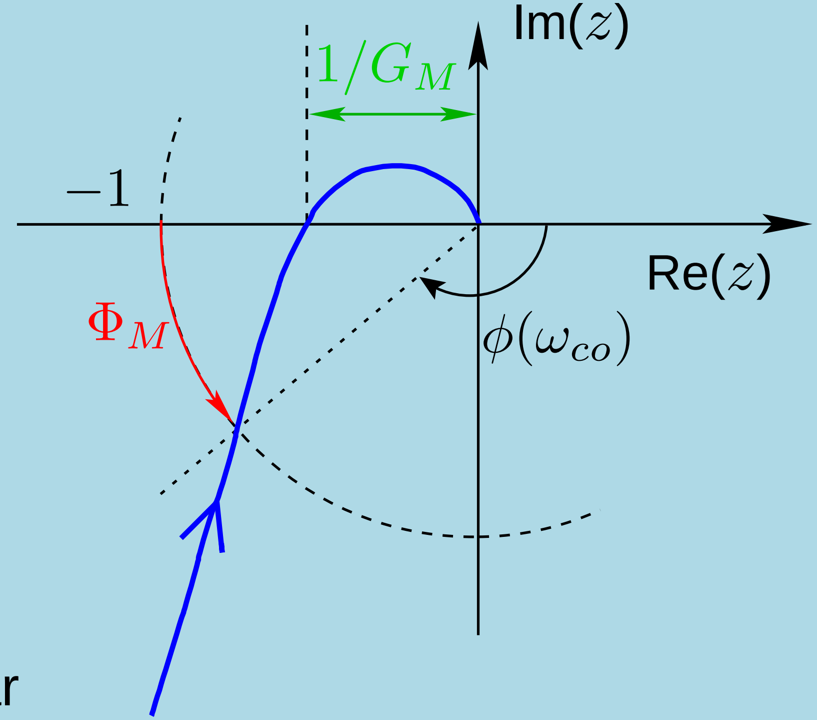
3 – Marges de stabilité

☞ Marge de phase :

$$\Phi_M = 180^o + \arg(F_{BO}(e^{j\omega_{co}T_e}))$$ avec

pulsation de coupure du gain ω_{co} définie par

$$|F_{BO}(e^{j\omega_{co}T_e})| = 1$$



☞ Marge de gain :

$$G_M = -|F_{BO}(e^{j\omega_\pi T_e})|$$ avec

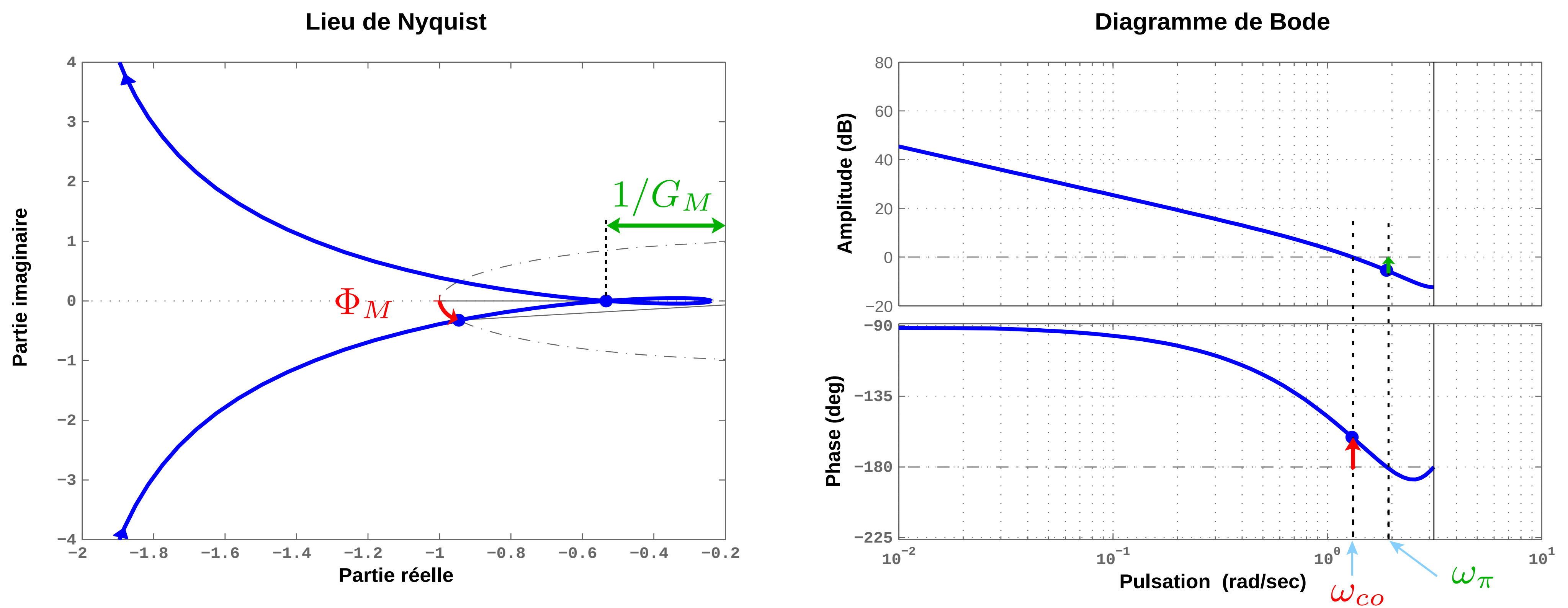
pulsation de coupure du déphasage ω_π définie par

$$\arg(F_{BO}(e^{j\omega_\pi T_e})) = -\pi$$

$\Longrightarrow$ une “mesure” de la robustesse du système / stabilité

☞ Exemple :

Soit la transmittance échantillonnée en BO : $F_{BO}(z) = \dfrac{K(z+0{,}4)}{(z-1)(z-0{,}25)}$



4 – Lieu d'Evans

☞ Définition du *lieu d'Evans* ou du *lieu des racines* :

Les courbes décrites par les pôles du système asservi lorsque $C(z) = K_c$ varie qui correspondent aux courbes décrites par les racines de l'équation caractéristique (de l'asservissement) lorsque K_c varie

$\Longrightarrow$ étudier les racines du polynôme caractéristique $D_{BF}(z) = 0$ ou de l'équation caractéristique

$$1 + F_{BO}(z) = 0 \quad \text{où} \quad F_{BO}(z) = C(z)G(z)H(z) \text{ avec } C(z) = K_c$$

☞ Règles de construction du lieu d'Evans :

$\Longrightarrow$ construction basée uniquement sur la fonction de transfert $F_{BO}(z)$

$$F_{BO}(z) = K_c G(z) H(z) = \underbrace{K_c K_g}_{K} \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(z - p_j)}$$

$\Longrightarrow$ équation caractéristique du lieu d'Evans

$$\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(z - z_i)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(z - p_j)} = -\frac{1}{K}$$ lorsque K varie de 0 à ∞

➠ Un point M d'affixe z_M appartient au lieu des racines ssi :

1. *condition du module*

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} |z_M - z_i|}{\prod_{j=1}^{n} |z_M - p_j|} = \frac{1}{K}$$

2. *condition de l'angle*

$$\sum_{i=1}^{m} \arg(z_M - z_i) - \sum_{j=1}^{n} \arg(z_M - p_j) = \pi(1+2\lambda) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{N} \text{ quelconque}$$

- Règle 1 :
  - $\rightarrow$ *Nombre de branches du lieu* : n branches ; Le nombre de branches est identique au nombre de pôles de la boucle ouverte
  - $\rightarrow$ *Points de départ* : les n branches partent, pour $K = 0$, des n pôles $\{p_j\}$ de $F_{BO}(z)$
  - $\rightarrow$ *Points d'arrivée* : les n branches aboutissent, pour $K \longrightarrow \infty$, aux m zéros $\{z_i\}$ et aux $n - m$ zéros à l'infini de $F_{BO}(z)$.

    Donc, le lieu comporte $n - m$ branches qui vont à l'infini

- Règle 2 : Le lieux des racines est *symétrique* par rapport à l'axe réel
- Règle 3 : *Branches du lieu appartenant à l'axe réel*

  Un point M de l'axe réel appartient au lieu si le nombre de pôles et zéros réels de la boucle ouverte, comptés avec leur ordre de multiplicité, et situés à la droite du point M, est impair
- Règle 4 : *Asymptotes des branches à l'infini*

  Les $n - m$ asymptotes des branches partant à l'infini font avec l'axe réel des angles :

$$\alpha_\lambda = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{n - m}, \lambda = 0{,}1, \ldots ,(n - m - 1)$$

Ces $n-m$ asymptotes s'intersectent avec l'axe réel en un seul point d'abscisse :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

➠ Règle 5 :

$\rightarrow$ *Points de séparation* :

Correspondent à l'intersection du lieu avec l'axe réel et traduit l'existence d'une racine réelle multiple qui a la propriété d'annuler la dérivée de $F_{BO}(z)$:

$$\frac{d\,F_{BO}(z)}{d\,z} = 0$$

$\Longrightarrow$ condition nécessaire mais pas suffisante

$\rightarrow$ *Angle des branches au point de séparation* :

Si N branches du lieu d'Evans se coupent en un point de séparation alors l'angle entre deux demi-branches voisines est égal à $\dfrac{\pi}{N}$

➠ Règle 6 :

$\rightarrow$ *Angle de départ d'une branche* :

Soit p_k un pôle de multiplicité n_k, alors les n_k branches partant de p_k font des angles β_k par rapport à l'horizontale et

$$\beta_k = \frac{1}{n_k}\Big(\sum_{i=1}^{m} \arg(p_k - z_i) - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \arg(p_k - p_j) - \pi(1 + 2\lambda)\Big),$$

$$\lambda = 0,1,\ldots,(n_k - 1)$$

→ *Angle d'arrivée d'une branche* :

Soit z_k un zéro de multiplicité m_k, alors les m_k branches arrivant en z_k font des angles γ_k par rapport à l'horizontale et

$$\gamma_k = \frac{1}{m_k}\Big(- \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \arg(z_k - z_i) + \sum_{j=1}^{n} \arg(z_k - p_j) - \pi(1 + 2\lambda)\Big),$$

$$\lambda = 0{,}1, \ldots, (m_k - 1)$$

➠ Règle 7 : *Graduation du lieu en valeur de* K

La valeur de K en tout point M, d'affixe z_M, du lieu d'Evans se calcule en utilisant l'équation caractéristique ou la condition du module

☞ Exemple 1 : Soit $F_{BO}(z) = K\dfrac{z+0{,}5}{(z-1)(z-0{,}5)}$

Règle 1 :

Nombre des branches : $n = 2$ branches

Points de départ : les pôles de la boucle ouverte $\{1;\ 0{,}5\}$

Points d'arrivée : le zéro de la boucle ouverte $\{-0{,}5\}$ et le zéros à l'infini

$\Longrightarrow 1$ branche à l'infini

Règle 3 : Branches du lieu appartenant à l'axe réel : tout point M d'abscisse z_M

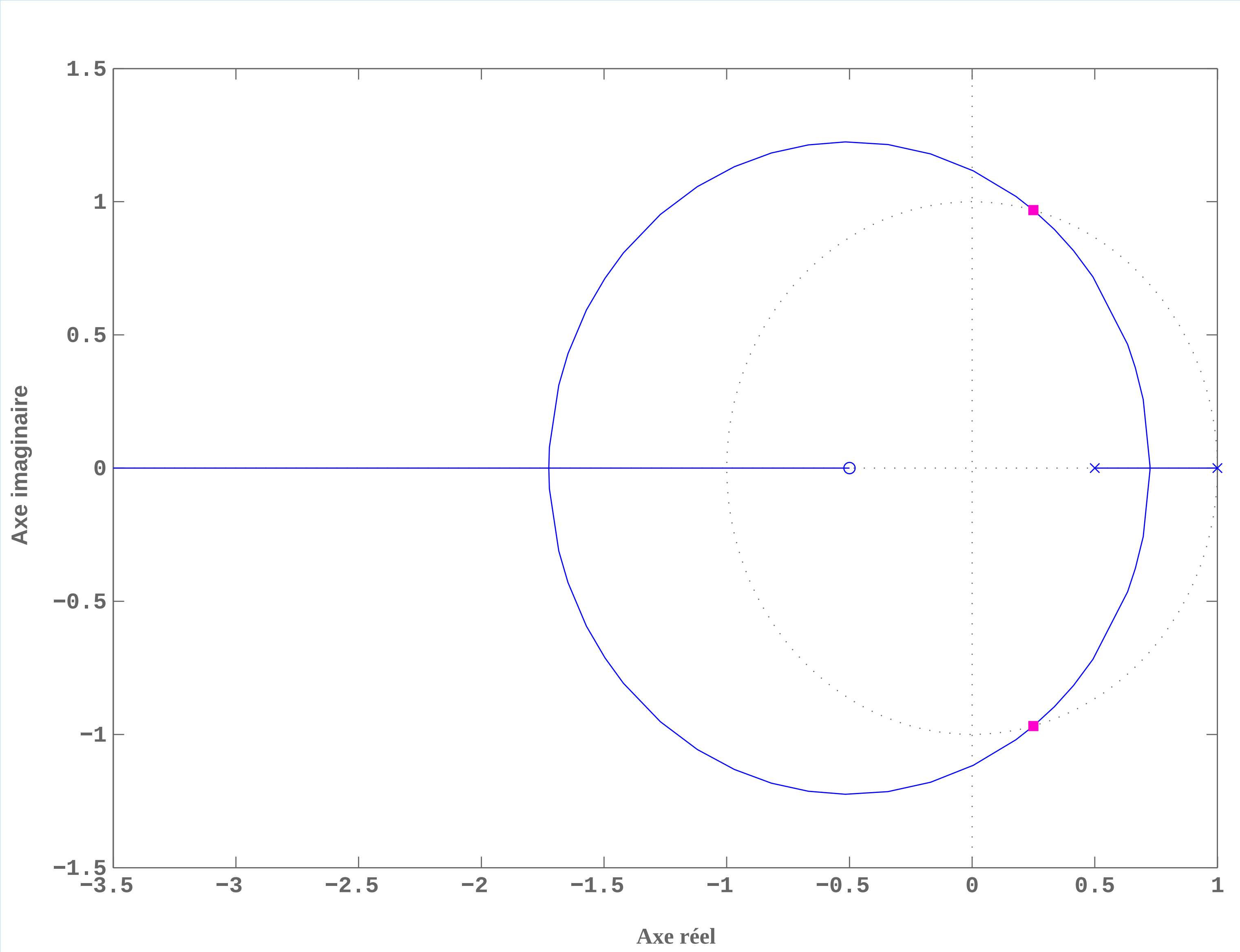
avec $z_M \in [0{,}5\ \ 1] \cup (-\infty\ \ -0{,}5]$

Règle 4 : Asymptote de la branches à l'infini : $\alpha_0 = \pi$

Règle 5 : Points de séparation :

$$\frac{d\, F_{BO}(z)}{d\, z} = 0 \Longrightarrow z_1 = 0{,}72 \text{ et } z_2 = -1{,}72$$

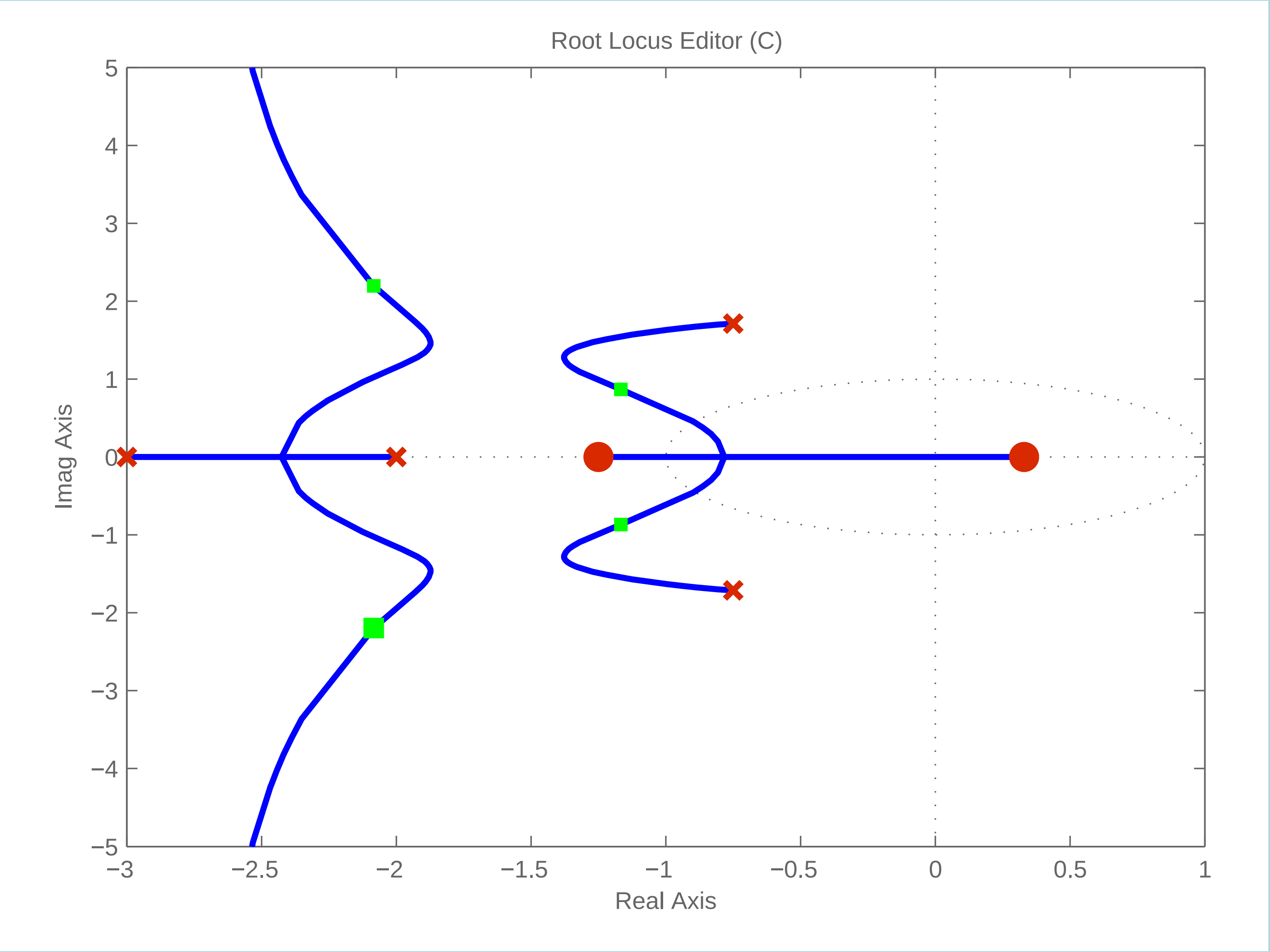
Angles des branches aux points de séparations = $\pm\dfrac{\pi}{2}$


1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
Axe imaginaire
Axe réel

☞ Exemple 2 :

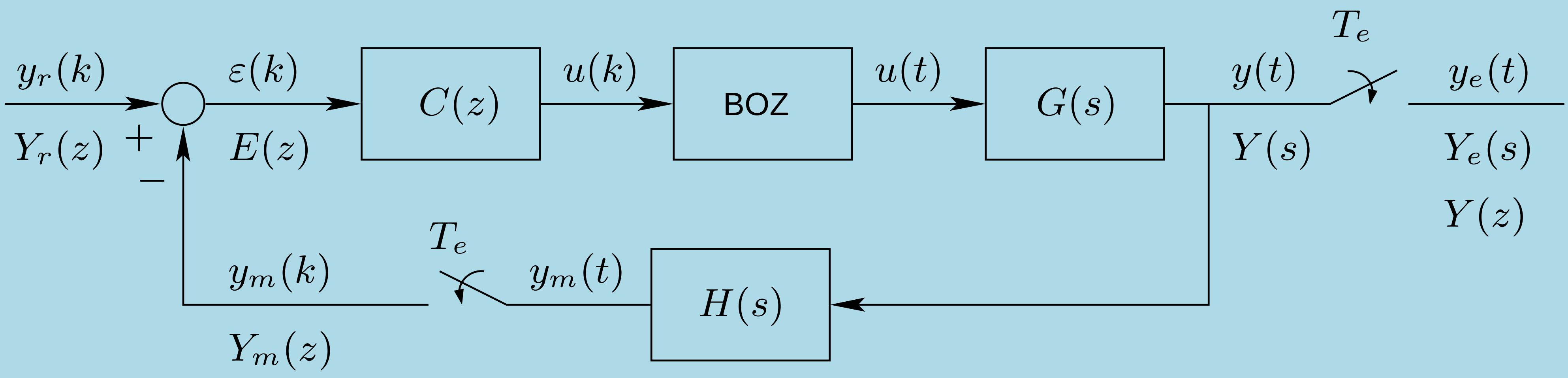
Tracer le lieu d'Evans pour la fonction de transfert en boucle ouverte

$$F_{BO}(z) = K\frac{10(0{,}8z+1)(z-0{,}33)}{(z+2)(z+3)(2z^2+3z+7)}$$


Root Locus Editor (C)
Imag Axis
Real Axis
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1

5 – Précision des systèmes asservis échantillonnés

☞ Expression de l'erreur :



Le signal d'erreur :

$$\varepsilon(k) = y_r(k) - y_m(k) \Longrightarrow E(z) = \frac{Y_r(z)}{1 + C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G(s)H(s)}{s}\right\}}$$

- Erreur en régime permanent :

théorème de la valeur finale (BF stable)

$$\Longrightarrow \varepsilon_\infty = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \frac{Y_r(z)}{1+F_{BO}(z)}$$

avec la fonction de transfert en BO $F_{BO}(z) = C(z)(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}$

- *Classe du système* en boucle ouverte :

$$\text{Soit} \quad F_{BO}(z) = \frac{1}{(z-1)^c} \frac{A(z)}{B(z)} \quad \text{avec} \quad \frac{A(1)}{B(1)} = K$$

et $c =$ classe du système en BO = nombre d'intégrateurs de la BO

- Erreur statique :
  - → Entrée échelon : $y_r(k) = E_0\mathbb{U}(k) \Longrightarrow$ *écart permanent d'ordre* 0

$$Y_r(z) = \frac{E_0 z}{z-1} \Longrightarrow \varepsilon_\infty = \lim_{z\to 1} \frac{E_0}{1+F_{BO}(z)} = \begin{cases} \dfrac{E_0}{1+K} & \text{si } c = 0 \\ 0 & \text{si } c > 0 \end{cases}$$

  - → Entrée rampe : $y_r(k) = V_0 k\mathbb{U}(k) \Longrightarrow$ *écart permanent d'ordre* 1

$$Y_r(z) = \frac{V_0 z}{(z-1)^2} \Longrightarrow \varepsilon_\infty = \lim_{z\to 1} \frac{V_0}{(z-1)(1+F_{BO}(z))} = \begin{cases} \infty & \text{si } c = 0 \\ \dfrac{V_0}{K} & \text{si } c = 1 \\ 0 & \text{si } c > 1 \end{cases}$$

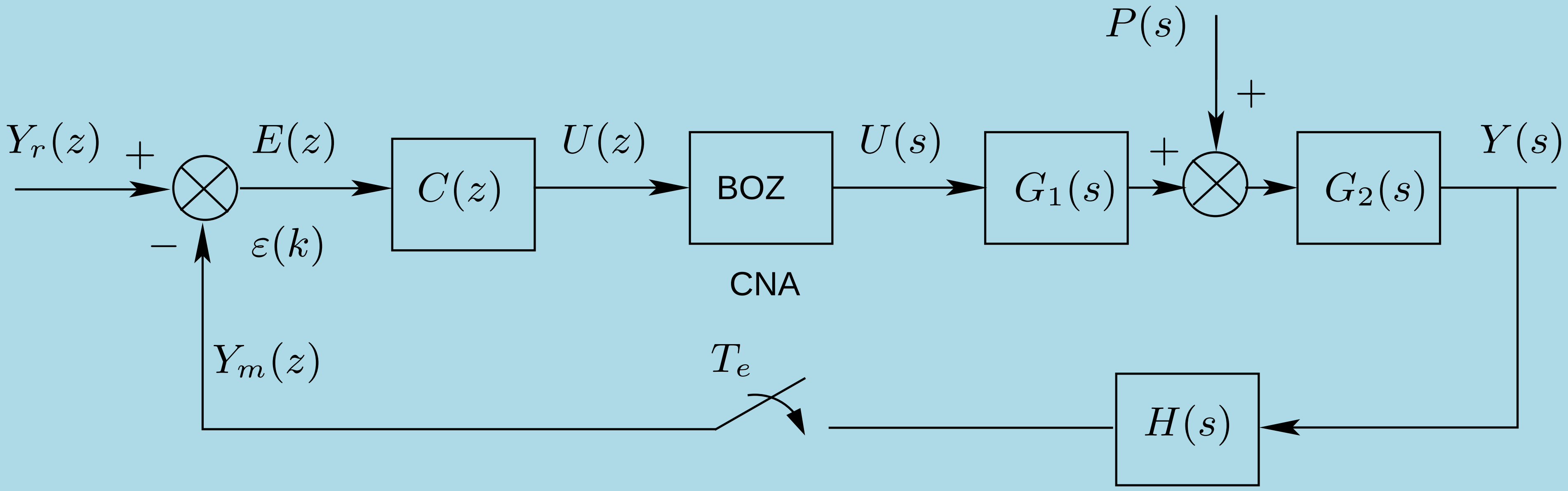
→ Entrée parabolique : $y_r(k) = W_0 k^2 \mathbb{U}(k) \Longrightarrow$ *écart permanent d'ordre* 2

$$Y_r(z) = \frac{W_0 z(z+1)}{(z-1)^3} \Longrightarrow \varepsilon_\infty = \lim_{z \to 1} \frac{W_0(z+1)}{(z-1)^2(1+F_{BO}(z))} = \begin{cases} \infty & \text{si } c \leq 1 \\ 2\dfrac{W_0}{K} & \text{si } c = 2 \\ 0 & \text{si } c > 2 \end{cases}$$

➠ Remarque :

On peut annuler un écart permanent d'ordre n si et seulement si la classe de la boucle ouverte est au moins $n+1$.

☞ Erreur due aux perturbations :



$$Y(z) = \frac{C(z)\,(1 - z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{s}\right\}}{1 + F_{BO}(z)} Y_r(z) + \frac{\mathcal{Z}\{G_2(s)P(s)\}}{1 + F_{BO}(z)}$$

avec $F_{BO}(z) = C(z)(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G_1(s)G_2(s)H(s)}{s}\right\}$

➠ Erreur d'asservissement générée par la perturbation :

$$Y_r(z) = 0 \Longrightarrow E(z) = -Y_m(z) = \frac{\mathcal{Z}\{H(s)G_2(s)P(s)\}}{1 + F_{BO}(z)}$$

Supposons que :

→ $F_{BO}(z)$ est de classe c alors

$$\lim_{z \to 1} (z-1)^c F_{BO}(z) = K_2$$

→ perturbation de type échelon : $P(s) = \dfrac{E_0}{s}$

→ $G_2(s)H(s)$ contient c_2 intégrateurs alors

$$\lim_{z \to 1} (z-1)^{c_2+1} \mathcal{Z}\{H(s)G_2(s)P(s)\} = K_1$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, alors

$$\varepsilon_\infty = -E_0 \frac{K_1 \lim\limits_{z\to 1} (z-1)^{c-c_2-1}}{\lim\limits_{z\to 1} (z-1)^c + K_2}$$

➠ Remarque :

Pour obtenir une erreur statique nulle en présence d'une perturbation de type échelon (rejet de la perturbation), il faut et il suffit que $c > c_2 + 1$, c'est-à-dire qu'il y ait au moins un intégrateur en amont du point d'application de la perturbation (soit dans $C(z)$, soit dans $G_1(s)$).